

Bab 1. Induksi Matematika

Induksi Matematika adalah cara standar dalam membuktikan bahwa sebuah pernyataan tertentu berlaku untuk setiap bilangan asli. Pembuktian dengan cara ini terdiri dari dua langkah, yaitu:

1. Menunjukkan bahwa pernyataan itu berlaku untuk bilangan 1.
2. Menunjukkan bahwa jika pernyataan itu berlaku untuk bilangan n , maka pernyataan itu juga berlaku untuk bilangan $n + 1$.

Misalkan akan dibuktikan suatu pernyataan bahwa jumlah n bilangan asli pertama, yaitu $1+2+\dots+n$, adalah sama dengan $\frac{n(n+1)}{2}$. Untuk membuktikan bahwa pernyataan itu berlaku untuk setiap bilangan asli, langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Menunjukkan bahwa pernyataan tersebut benar untuk $n = 1$. Jelas sekali bahwa jumlah 1 bilangan asli pertama adalah $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Jadi pernyataan tersebut adalah benar untuk $n = 1$.
2. Menunjukkan bahwa jika pernyataan tersebut benar untuk $n = k$, maka pernyataan tersebut juga benar untuk $n = k + 1$. Hal ini bisa dilakukan dengan cara:

- Mengasumsikan bahwa pernyataan tersebut benar untuk $n = k$, yaitu

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

- Menambahkan $k + 1$ pada kedua ruas, yaitu

$$1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1)$$

- Dengan menggunakan manipulasi aljabar, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

– Dengan demikian

$$1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)((k + 1) + 1)}{2}$$

– Jadi pernyataan tersebut benar untuk $n = k + 1$.

3. Dengan induksi matematika dapat disimpulkan bahwa pernyataan tersebut berlaku untuk setiap bilangan asli n .

Secara formal *Induksi Matematika* ini bisa didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.1

Misalkan untuk setiap bilangan asli n kita mempunyai pernyataan $P(n)$ yang bisa benar atau salah. Misalkan

1. $P(1)$ benar.
2. Jika $P(n)$ benar, maka $P(n + 1)$ benar.

Sehingga $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli n .

Langkah 1 disebut dengan *Langkah Dasar*, sedangkan Langkah 2 disebut dengan *Langkah Induktif*.

Jika pada Langkah Induktif yang diasumsikan adalah pernyataan $P(i)$ benar untuk setiap bilangan $i \leq n$, maka perumusan induksi matematika seperti ini disebut *Bentuk Kuat Induksi Matematika*.

Contoh 1.1

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa

$$n! \geq 2^{n-1}$$

untuk setiap $n = 1, 2, \dots$

1. Akan ditunjukkan bahwa $n! \geq 2^{n-1}$ benar untuk $n = 1$. Jelas sekali bahwa $1! = 1 \geq 1 = 2^0 = 2^{1-1}$.

2. Asumsikan bahwa $n! \geq 2^{n-1}$ adalah benar untuk $n = k$. Akan ditunjukkan bahwa $n! \geq 2^{n-1}$ juga benar untuk $n = k + 1$, yaitu $(k + 1) \geq 2^{(k+1)-1}$.

$$\begin{aligned}
 (k + 1)! &= (k + 1)(k!) \\
 &\geq (k + 1)(2^{k-1}) \\
 &\geq 2 \cdot 2^{k-1} \\
 &= 2^{1+(k-1)} \\
 &= 2^{(k+1)-1}
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(k+1) \geq 2^{(k+1)-1}$. Karena Langkah Dasar dan Langkah Induktif terbukti, maka dapat disimpulkan bahwa

$$n! \geq 2^{n-1}$$

untuk setiap $n = 1, 2, \dots$

Contoh 1.2

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa $5^n - 1$ dapat dibagi 4 untuk setiap $n = 1, 2, \dots$

1. Akan ditunjukkan bahwa $5^n - 1$ habis dibagi 4 untuk $n = 1$. Jelas sekali bahwa $5^1 - 1 = 5 - 1 = 4$ habis dibagi 4.
2. Asumsikan bahwa $5^n - 1$ habis dibagi 4 untuk $n = k$, yaitu $5^k - 1$ habis dibagi 4. Akan ditunjukkan bahwa $5^n - 1$ juga habis dibagi 4 untuk $n = k + 1$, yaitu $5^{k+1} - 1$ habis dibagi 4.

$$\begin{aligned}
 5^{k+1} - 1 &= 5 \cdot 5^k - 1 \\
 &= (1 + 4) \cdot 5^k - 1 \\
 &= 5^k + 4 \cdot 5^k - 1 \\
 &= (5^k - 1) + 4 \cdot 5^k
 \end{aligned}$$

Berdasarkan asumsi, $5^k - 1$ habis dibagi 4. Sedangkan $4 \cdot 5^k$ juga habis dibagi 4. Dengan demikian $5^{k+1} - 1$ habis dibagi 4. Karena Langkah Dasar dan Langkah Induktif terbukti, maka dapat disimpulkan bahwa $5^n - 1$ dapat dibagi 4 untuk setiap $n = 1, 2, \dots$

Latihan

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan persamaan berikut ini benar untuk setiap bilangan asli n .

1. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

2. $1(1!) + 2(2!) + \dots + n(n!) = (n+1)! - 1$

3. $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n+1}n^2 = \frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}$

4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan pertidaksamaan berikut ini.

5. $2n + 1 \leq 2^n$, untuk $n = 3, 4, \dots$

6. $(1+x)^n \geq 1+nx$, untuk $x \geq -1$ dan $n = 1, 2, \dots$

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan pernyataan berikut ini.

7. $11^n - 6$ habis dibagi 5, untuk $n = 1, 2, \dots$

8. $6 \cdot 7^n - 2 \cdot 3^n$ habis dibagi 4, untuk $n = 1, 2, \dots$

Referensi

1. R. Johnsonbaugh, *Discrete Mathematics*, Fourth Edition, 1997, Prentice Hall.
2. Wikipedia, *Mathematical induction*, http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_induction.