Bab 4. Koefisien Binomial

Koefisien binomial merupakan bilangan-bilangan yang muncul dari hasil penjabaran penjumlahan dua peubah yang dipangkatkan, misalnya $(a+b)^n$. Sepintas terlihat bahwa ekspresi $(a+b)^n$ tidak ada hubungannya dengan kombinasi, tetapi kenyataannya kita bisa mendapatkan rumus untuk penjabaran $(a+b)^n$ dengan menggunakan rumus banyaknya kombinasi-r dari n unsur. Teori untuk menurunkan rumus yang diperoleh dari penjabaran $(a+b)^n$ dengan menggunakan kombinasi dikenal dengan *Teorema Binomial*. Sebelum membahas teorema ini, perhatikan ilustrasi berikut ini. Dalam aljabar kita tahu bahwa

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Penjabaran dari $(a+b)^3$ yang merupakan perkalian 3 faktor $(a+b)$, yaitu

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

adalah pemilihan baik a maupun b dari masing-masing ketiga faktor $(a+b)$ tersebut, selanjutnya hasil pemilihan tersebut dikalikan bersama-sama dan kemudian hasil kalinya dijumlahkan. Misalnya, jika kita memilih a dari setiap faktor dan mengalikannya, maka kita peroleh aaa. Jika kita memilih a dari faktor pertama, a dari faktor kedua dan b dari faktor ketiga kemudian mengalikannya, maka kita peroleh aab, dan seterusnya. Sehingga semua kemungkinan pemilihan baik a maupun b dari masing-masing faktor adalah

$$aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb$$

atau kalau dikalikan diperoleh

$$a^3, a^2b, a^2b, ab^2, a^2b, ab^2, ab^2, b^3$$

Jika semua suku-suku diatas dijumlahkan, maka hasilnya adalah

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Bilangan 3 yang merupakan koefisien dari a^2b muncul dari pemilihan a dari 2 faktor dan b dari 1 faktor sisanya. Hal ini bisa dilakukan dalam $C(3,2)$ atau $C(3,1)$ cara. Cara yang sama bisa dilakukan untuk memperoleh koefisien b^3 yang dalam hal ini merupakan pemilihan a dari 0 faktor dan b dari 3 faktor lainnya yang dapat dilakukan dalam $C(3,0)$ atau $C(3,3)$ cara, dan seterusnya. Sehingga secara umum koefisien-koefisien tersebut bisa ditentukan berdasarkan Teorema Binomial berikut ini.

Teorema 4.1

Jika a dan b adalah bilangan real dan n adalah bilangan bulat positif, maka

$$(a+b)^n = \Sigma_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k$$

Bukti.

Penjabaran dari $(a+b)^n$ merupakan perkalian $(a+b)$ sebanyak n faktor, yaitu

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)...(a+b)$$

Koefisien dari $a^{n-k}b^k$ dapat ditentukan dengan banyaknya cara pemilihan a dari $n-k$ faktor diantara n faktor yang ada atau pemilihan b dari k faktor diantara n faktor. Hal ini bisa dilakukan dengan $C(n, n-k)$ atau $C(n,k)$ cara. Penentuan koefisien ini berlaku untuk setiap $k = 0, 1, ..., n$. Sehingga

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= C(n,0)a^{n-0}b^0 + C(n,1)a^{n-1}b^1 + ... + C(n,n)a^{n-n}b^n \\ &= \Sigma_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k \end{aligned}$$

sama dengan yang dibuktikan. $\square$

Contoh 4.1

Jabarkan $(a+b)^4$.

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= C(4,0)a^{4-0}b^0 + C(4,1)a^{4-1}b^1 + C(4,2)a^{4-2}b^2 + C(4,3)a^{4-3}b^3 \\ &\quad + C(4,4)a^{4-4}b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

Contoh 4.2

Tentukan koefisien dari a^5b^6 *dalam penjabaran* $(a+b)^{11}$.

$$C(11,6) = \frac{11!}{5!.6!} = \frac{11.10.9.8.7}{5.4.3.2.1} = 462$$

Contoh 4.3

Jabarkan $(2x-3y)^5$.

$$\begin{aligned} (2x-3y)^5 &= C(5,0)(2x)^{5-0}(-3y)^0 + C(5,1)(2x)^{5-1}(-3x)^1 + \\ &\quad C(5,2)(2x)^{5-2}(-3y)^2 + C(5,3)(2x)^{5-3}(-3x)^3 + \\ &\quad C(5,4)(2x)^{5-4}(-3y)^4 + C(5,5)(2x)^{5-5}(-3x)^5 \\ &= (2x)^5 + 5(2x)^4(-3y) + 10(2x)^3(-3y)^2 + 10(2x)^2(-3y)^3 + \\ &\quad 5(2x)(-3y)^4 + (-3y)^5 \\ &= 32x^5 - 240x^4y + 720x^3y^2 - 1080x^2y^3 + 810xy^4 - 243y^5 \end{aligned}$$

Contoh 4.4

Tentukan koefisien dari $x^2y^3z^5$ dalam penjabaran $(x+y+z)^{10}$.

Masalah ini bisa kita asumsikan sebagai sebuah aktifitas yang terdiri dari 3 kegiatan. Pertama memilih x dari 2 faktor diantara 10 faktor yang bisa dilakukan dalam $C(10,2)$ cara. Kedua memilih y dari 3 faktor diantara 8 faktor yang bisa dilakukan dalam $C(8,3)$ cara. Ketiga memilih z dari 5 faktor diantara 5 faktor sisanya yang bisa dilakukan dalam $C(5,5)$ cara. Sehingga banyaknya cara untuk keseluruhan kegiatan adalah

$$C(10,2).C(8,3).C(5,5)$$

yang merupakan koefisien dari $x^2y^3z^5$.

Contoh 4.5

Gunakan Teorema Binomial untuk membuktikan bahwa

$$\Sigma_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$$

Teorema binomial menyatakan bahwa

$$(a+b)^n = \Sigma_{k=0}^{n} C(n,k) a^{n-k} b^k$$

Dengan mengambil $a = 1$ dan $b = 1$, maka diperoleh

$$2^n = (1+1)^n = \Sigma_{k=0}^{n} C(n,k) 1^{n-k} 1^k = \Sigma_{k=0}^{n} C(n,k)$$

Disamping menggunakan kombinasi, kita juga bisa menentukan koefisien binomial dengan menggunakan segitiga Pascal seperti berikut ini.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
. & & & & & . & & & & & . \\
. & & & & & . & & & & & . \\
. & & & & & . & & & & & .
\end{array}$$

Batas dari segitiga Pascal diatas terdiri dari 1 dan nilai-nilai didalamnya merupakan hasil penjumlahan dari dua bilangan diatasnya. Secara formal hubungan itu dinyatakan dalam teorema berikut ini.

Teorema 4.2

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)$$

untuk $1 \leq k \leq n$.

Bukti

Misalkan X sebuah himpunan dengan n unsur. Ambil $a \notin X$ sehingga $C(n+1,k)$ merupakan banyaknya subhimpunan k unsur dari $Y = X \cup \{a\}$. Subhimpunan k unsur dari Y bisa dibagi menjadi dua kelas yang saling lepas, yaitu

1. Subhimpunan dari Y yang tidak mengandung a
2. Subhimpunan dari Y yang mengandung a

Subhimpunan dari kelas 1 merupakan subhimpunan k unsur dari X dan banyaknya adalah $C(n,k)$. Sedangkan subhimpunan dari kelas 2 merupakan subhimpunan $k-1$ unsur dari X digabung dengan a dan banyaknya adalah $C(n,k-1)$. Dengan demikian

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)$$

seperti yang dibuktikan. □

Identitas pada teorema diatas disebut dengan *Identitas Kombinatorial*. Sedangkan argumen yang dipakai untuk pembuktiannya disebut dengan *Argumen Kombinatorial*.

Contoh 4.6

Gunakan Teorema 4.2 untuk menunjukkan bahwa

$$\Sigma_{i=k}^{n} C(i,k) = C(n+1,k+1)$$

Dengan menggunakan Teorema 4.2, kita peroleh

$$C(i+1,k+1) = C(i,k) + C(i,k+1)$$

Sehingga

$$C(i,k) = C(i+1,k+1) - C(i,k+1)$$

Berikutnya adalah menjabarkan $\Sigma_{i=k}^{n} C(i,k)$, yaitu

$$\begin{aligned} \Sigma_{i=k}^{n} C(i,k) &= C(k,k) + C(k+1,k) + C(k+2,k) + ... + C(n,k) \\ &= 1 + C(k+2,k+1) - C(k+1,k+1) + C(k+3,k+1) - \\ &\quad C(k+2,k+1) + ... + C(n+1,k+1) - C(n,k+1) \\ &= C(n+1,k+1) \end{aligned}$$

Latihan

4.1. Tentukan koefisien dari suku-suku dibawah ini jika ekspresinya dijabarkan

a. x^4y^5 dari ekspresi $(2x+3y)^9$.

b. $x^2y^3y^5$ dari ekspresi $(x+y+z)^{10}$.

c. a^2x^3 dari ekspresi $(a+x+c)^2(a+x+d)^3$.

d. a^2x^3 dari ekspresi $(a+ax+x)(a+x)^4$.

4.2. Carilah banyaknya suku dalam penjabaran ekspresi berikut ini.

a. $(w+x+y+z)^{12}$.

b. $(x+y+z)^{10}(w+x+y+z)^2$.

4.3. Buktikan bahwa

$$\Sigma_{0\leq i+j\leq n}\frac{n!}{i!.j!.(n-i-j)!}$$

4.4. Dengan menggunakan induksi matematika, buktikan bahwa

$$(a+b)^n = \Sigma_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k$$

4.5. Gunakan rumus kombinasi r dari n unsur yang berbeda, untuk membuktikan bahwa

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)$$

Referensi

4.1. R. Johnsonbaugh, *Discrete Mathematics*, Fourth Edition, 1997, Prentice Hall.