Bab 5. Prinsip Pigeonhole

Prinsip Pigeonhole atau Prinsip Rumah Merpati pertama kali dinyatakan oleh ahli matematika dari Jerman yang bernama Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet pada tahun 1834, sehingga prinsip ini juga dikenal dengan istilah Prinsip Laci Dirichlet. Salah satu contoh penggunaan dari prinsip ini adalah bahwa jika terdapat 4 mahasiswa yang akan menempati rumah dengan 3 kamar maka ada kamar yang ditempati oleh paling sedikit 2 mahasiswa. Pernyataan ini tidak menentukan kamar mana yang ditempati oleh paling sedikit 2 mahasiswa, tetapi hanya menjelaskan keberadaan dari kamar tersebut. Secara formal Prinsip Pigeonhole ini dijelaskan dalam pernyataan berikut ini.

Prinsip Pigeonhole Bentuk Pertama

Jika n merpati ditempatkan pada m rumah merpati, dimana $n > m$, maka terdapat rumah merpati yang memuat paling sedikit dua merpati.

Untuk membuktikan pernyataan Prinsip Pigeonhole bentuk pertama ini, kita gunakan kontradiksi. Misalkan kesimpulan dari pernyataan tersebut salah, sehingga setiap rumah merpati memuat paling banyak satu merpati. Karena ada m rumah merpati, maka paling banyak m merpati yang bisa dimuat. Padahal ada n merpati yang tersedia dan $n > m$, sehingga kita dapatkan sebuah kontradiksi. $\square$

Contoh 5.1

Pada saat pembentukan tugas kelompok yang dibagi menjadi enam kelompok, tujuh mahasiswa tidak masuk kuliah sehingga mereka belum terdaftar dalam kelompok yang sudah dibagi. Tunjukkan bahwa paling sedikit ada dua mahasiswa yang bergabung dalam satu kelompok!

Kita asumsikan tujuh mahasiswa tersebut dengan merpati dan enam kelompok sebagai rumah merpati. Berdasarkan prinsip pigeonhole bentuk pertama terdapat rumah merpati yang memuat paling sedikit dua merpati. Dengan demikian terdapat suatu kelompok yang memuat paling sedikit dua mahasiswa.

Contoh 5.2

Seorang kyai di sebuah desa yang selalu diminta untuk memberikan nama bayi yang lahir, menyiapkan nama depan Mohammad, Akhmad, Abdul dan nama belakang Hadi, Akbar, Gofur bagi bayi yang lahir dalam suatu bulan tertentu.

Pada bulan tersebut terdapat sebelas bayi yang lahir di desa itu. Tunjukkan bahwa paling sedikit ada dua bayi yang mempunyai nama yang sama dengan asumsi bahwa kyai tersebut selalu memberikan nama depan dan belakang!

Terdapat sembilan kombinasi nama depan dan belakang yang mungkin untuk sebelas bayi yang lahir pada bulan tersebut. Kita asumsikan sebelas bayi tersebut dengan merpati dan sembilan nama sebagai rumah merpati. Berdasarkan prinsip pigeonhole bentuk pertama terdapat rumah merpati yang memuat paling sedikit dua merpati. Dengan demikian terdapat kombinasi nama yang dipakai paling sedikit dua bayi.

Prinsip Pigeonhole ini bisa kita nyatakan dalam bentuk lain seperti berikut ini.

Prinsip Pigeonhole Bentuk Kedua

Jika f merupakan sebuah fungsi dari suatu himpunan terhingga X ke suatu himpunan terhingga Y dan $|X| > |Y|$, maka $f(x_1) = f(x_2)$ untuk beberapa $x_1, x_2 \in X$, dimana $x_1 \neq x_2$.

Untuk membuktikan Prinsip Pigeonhole Bentuk Kedua ini kita bisa menggunakan Prinsip Pigeonhole Bentuk Pertama dengan mengasumsikan X sebagai himpunan merpati dan Y sebagai himpunan rumah merpati. Selanjutkan kita memasangkan merpati x ke rumah merpati $f(x)$. Karena jumlah merpati lebih banyak dari rumahnya, maka terdapat paling sedikit dua merpati, $x_1, x_2 \in X$ yang dipasangkan ke rumah merpati yang sama, yaitu $f(x_1) = f(x_2)$ untuk beberapa $x_1, x_2 \in X$, dimana $x_1 \neq x_2$. □

Contoh 5.3

Ketua Program Studi Pendidikan Matematika akan membuat kode matakuliah untuk matakuliah-matakuliah bidang studi matematika dengan cara menambahkan tiga angka pada huruf KPM. Terdapat 51 matakuliah yang harus diberi kode dan tiga angka yang harus ditambahkan pada huruf KPM harus berkisar antara 101 sampai dengan 200. Tunjukkan bahwa terdapat paling sedikit dua matakuliah yang diberi kode dengan angka berurutan.

Misalkan angka-angka yang dipilih adalah

$$a_1, a_2, ..., a_{51}.$$

Jika angka-angka diatas digunakan bersama-sama dengan

$$a_1 + 1, a_2 + 1, ..., a_{51} + 1$$

maka terdapat 102 nomor yang merentang antara 101 sampai dengan 201. Karena ada 100 nomor yang disediakan (yaitu 101 sampai dengan 200) dan ada 102 nomor yang akan digunakan, maka menurut Prinsip Pigeonhole Bentuk Kedua terdapat paling sedikit dua nomor yang sama. Nomor $a_1, a_2, ..., a_{51}$ dan $a_1 + 1, a_2 + 1, ..., a_{51} + 1$ semuanya berbeda. Sehingga kita mempunyai

$$a_i = a_j + 1$$

Dengan demikian kode a_i berurutan dengan kode a_j.

Prinsip Pigeonhole Bentuk Kedua ini dapat dinyatakan ke dalam bentuk yang lebih umum seperti penyataan berikut ini.

Prinsip Pigeonhole Bentuk Ketiga

Jika f merupakan sebuah fungsi dari suatu himpunan terhingga X ke suatu himpunan terhingga Y, dimana $|X| = n$, $|Y| = m$ dan $\lceil \frac{n}{m} \rceil = k$, maka terdapat paling sedikit k anggota $x_1, x_2, ..., x_k \in X$ sedemikian hingga

$$f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_k).$$

Untuk membuktikan pernyataan Prinsip Pigeonhole bentuk ketiga ini, kita gunakan kontradiksi. Misalkan $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$. Andaikan kesimpulan dari pernyataan tersebut salah, maka terdapat paling banyak $k - 1$ anggota $x \in X$ dengan $f(x) = y_1$; terdapat paling banyak $k - 1$ anggota $x \in X$ dengan $f(x) = y_2$, dan seterusnya sampai dengan terdapat paling banyak $k - 1$ anggota $x \in X$ dengan $f(x) = y_m$. Sehingga terdapat paling banyak $m(k - 1)$ anggota X. Namun demikian

$$m(k - 1) < m.\frac{n}{m} = n$$

yang merupakan sebuah kontradiksi. Oleh karena itu, terdapat paling sedikit k anggota $x_1, x_2, ..., x_k \in X$ sedemikian hingga

$$f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_k).$$

□

Contoh 5.4

Dalam matakuliah Matematika Diskrit diberikan tugas kelompok yang akan dibagi menjadi enam kelompok. Jika terdapat 62 mahasiswa yang menempuh mata kuliah tersebut, tunjukkan bahwa terdapat paling sedikit ada 11 mahasiswa yang menjadi anggota suatu kelompok yang sama!

Kita asumsikan mahasiswa tersebut sebagai anggota dari himpunan daerah asal X dan kelompoknya sebagai anggota daerah kawan Y. Karena $|X| = 62$, $|Y| = 6$ dan $\lceil \frac{62}{6} \rceil = 11$. Maka berdasarkan Prinsip Pigeonhole Bentuk

Ketiga, terdapat paling sedikit 11 anggota X yang dipasangkan dengan suatu anggota Y yang sama. Dengan demikian terdapat paling sedikit ada 11 mahasiswa yang menjadi anggota suatu kelompok yang sama.

Latihan

5.1. Seorang buruh dari sebuah perusahaan dibayar mingguan setiap hari Sabtu. Tunjukkan bahwa pada suatu bulan buruh tersebut mendapatkan bayaran 5 kali.

5.2. Mungkinkah untuk saling menghubungkan lima prosesor sehingga tepat dua prosesor dihubungkan langsung pada sebuah nomor prosesor yang sama? Jelaskan!

5.3. Sebuah persediaan terdiri dari sebuah daftar 115 jenis barang, setiap jenis barang ditandai dengan "tersedia" atau "kosong". Dalam daftar tersebut terdapat 60 jenis barang yang tersedia. Tunjukkan bahwa terdapat paling sedikit dua jenis barang yang tersedia dalam daftar tepat empat jenis barang terpisah.

5.4. Dua belas pemain basket yang seragamnya dinomori 1 hingga 12, berdiri mengelilingi ring di lapangan basket dalam pengaturan tertentu. Tunjukkan bahwa ada tiga pemain berurutan yang jumlah nomornya paling sedikit 20.

4.5. Misalkan f adalah fungsi satu-satu dari $X = \{1, 2, ..., n\}$ pada X sendiri. Misalkan $f^k = fofo...of$ menyatakan komposisi sebanyak k dari f itu sendiri. Tunjukkan bahwa terdapat bilangan bulat positif berbeda i dan j sehingga $f^i(x) = f^j(x)$ untuk semua $x \in X$. Tunjukkan bahwa untuk suatu bilangan bulat positif k, $f^k(x) = x$ untuk semua $x \in X$.

Referensi

5.1. R. Johnsonbaugh, *Discrete Mathematics*, Fourth Edition, 1997, Prentice Hall.