

Bab 6. Relasi Berulang

Relasi berulang mendefinisikan sebuah barisan dengan memberikan nilai ke- n yang dikaitkan dengan suku-suku sebelumnya. Untuk mendefinisikan sebuah barisan, relasi ulang memerlukan nilai awal yang sudah ditentukan. Secara formal relasi berulang ini didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 6.1

Sebuah relasi berulang untuk barisan a_0, a_1, \dots merupakan sebuah persamaan yang mengaitkan a_n dengan a_0, a_1, \dots, a_{n-1} . Syarat awal untuk barisan a_0, a_1, \dots adalah nilai-nilai yang diberikan secara eksplisit pada beberapa suku dari barisan tersebut.

Contoh 6.1

Barisan 3, 7, 11, 15, ... didefinisikan dengan relasi berulang

$$a_n = a_{n-1} + 4, \quad n \geq 1$$

dengan syarat awal $a_0 = 3$.

Contoh 6.2

Carilah sebuah relasi berulang dan syarat awal yang membentuk sebuah barisan 1, 1, 2, 4, 16, 128, 4096, ...

$$2 = 2 \times 1 \times 1$$

$$4 = 2 \times 2 \times 1$$

$$16 = 2 \times 4 \times 2$$

$$128 = 2 \times 16 \times 4$$

$$4096 = 2 \times 128 \times 16$$

Dengan demikian relasi berulangnya adalah

$$a_n = 2 \times a_{n-1} \times a_{n-2} \quad n \geq 2$$

dengan syarat awal $a_0 = 1$ dan $a_1 = 1$.

Contoh 6.3

Seseorang mendepositokan uang sebesar Rp. 1.000.000,- pada sebuah bank dengan bunga majemuk 12% per tahun. Jika A_n menyatakan jumlah uang

pada akhir tahun ke- n , carilah sebuah relasi berulang dan syarat awal yang mendefinisikan barisan A_n .

Pada akhir tahun ke-1, jumlah uangnya adalah A_1 sama dengan jumlah awal ditambah bunga. Jika jumlah awal dinyatakan dengan A_0 , maka

$$A_1 = A_0 + 0,12 \times A_0 = 1,12 \times A_0$$

Pada akhir tahun ke-2, jumlah uangnya adalah A_2 sama dengan jumlah uang pada akhir tahun ke-1 ditambah bunga. Sehingga

$$A_2 = A_1 + 0,12 \times A_1 = 1,12 \times A_1$$

Pada akhir tahun ke- n , jumlah uangnya adalah A_n sama dengan jumlah uang pada akhir tahun ke- $n - 1$ ditambah bunga. Sehingga

$$A_n = A_{n-1} + 0,12 \times A_{n-1} = 1,12 \times A_{n-1}$$

Karena A_0 merupakan jumlah awal, maka $A_0 = 1.000.000$.

Dengan demikian relasi berulangnya adalah

$$A_n = 1,12 \times A_{n-1} \quad n \geq 1$$

dengan syarat awal $A_0 = 1.000.000$.

Penyelesaian Relasi Berulang

Menyelesaikan relasi berulang yang melibatkan barisan a_0, a_1, \dots sama halnya dengan mencari sebuah rumus eksplisit untuk bentuk umum a_n . Pada bagian ini kita hanya akan membahas penyelesaian relasi berulang dengan menggunakan metode *iterasi*. Untuk menyelesaikan relasi berulang dengan metode iterasi ini, kita menuliskan bentuk ke- n , yaitu a_n dalam bentuk-bentuk suku sebelumnya, yaitu $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$. Kemudian secara berurutan kita gunakan relasi berulang untuk menempatkan setiap a_{n-1}, \dots dengan ketentuan pendahulunya. Kita lakukan terus sampai sebuah rumus eksplisit diperoleh.

Contoh 6.4

Selesaikan relasi berulang

$$a_n = a_{n-1} + 4, \quad n \geq 1$$

dengan syarat awal $a_0 = 3$.

Dengan mengganti n dengan $n - 1$ pada rumus diatas, kita peroleh

$$a_{n-1} = a_{n-2} + 4$$

Sehingga

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 4 \\ &= (a_{n-2} + 4) + 4 \\ &= ((a_{n-3} + 4) + 4) + 4 \\ &\dots \\ &= a_0 + n \times 4 \end{aligned}$$

Karena $a_0 = 3$, maka kita peroleh

$$a_n = 3 + 4n$$

Contoh 6.5

Selesaikan relasi berulang yang diperoleh dari Contoh 6.3 tentang deposito uang di bank dengan bunga 14%.

Relasi berulangnya adalah

$$A_n = 1,12 \times A_{n-1} \quad n \geq 1$$

dengan syarat awal $A_0 = 1000000$.

$$\begin{aligned} A_n &= 1,12 \times A_{n-1} \\ &= 1,12 \times (1,12 \times A_{n-2}) \\ &= 1,12 \times (1,12 \times (1,12 \times A_{n-3})) \\ &\dots \\ &= 1,12^n \times A_0 \end{aligned}$$

Karena $A_0 = 1000000$, maka kita peroleh

$$A_n = 1000000 \times 1,12^n$$

Latihan

- 6.1. Jika P_n menyatakan banyaknya permutasi dari n objek yang berbeda, carilah sebuah relasi berulang dan syarat awal untuk barisan P_1, P_2, \dots

- 6.2. Seseorang menyetorkan Rp. 3.000.000 pada sebuah bank dengan bunga majemuk 12% per tiga bulan. Misalkan A_n menyatakan jumlah uang pada akhir tahun ke- n .
- Carilah relasi berulang dan syarat awalnya.
 - Tentukan nilai A_1, A_2, A_3 dan A_4 .
 - Carilah sebuah rumus eksplisitnya.
 - Berapa lama waktu yang dibutuhkan oleh orang tersebut agar jumlah uang di bank tersebut dua kali jumlah awalnya.
- 6.3. Selesaikan relasi berulang

$$a_n = 2 \times a_{n-1} \times a_{n-2} \quad n \geq 2$$

dengan syarat awal $a_0 = 1$ dan $a_1 = 1$.

- 6.4. Andaikan seorang mempunyai n dollar dan setiap hari digunakan untuk membeli jus 1 dollar, susu 2 dollar ataupun teh 2 dollar. Jika R_n adalah banyaknya cara membelanjakan semua uang, tunjukkan bahwa

$$R_n = R_{n-1} + 2R_{n-2}$$

dimana urutan diperhatikan. Misalnya, terdapat 11 cara untuk membelanjakan 4 dollar, yaitu ST, TS, JJS, JJT, JSJ, JTJ, SJJ, TJJ, JJJJ, SS, TT.

- 6.5. Misalkan S_n menyatakan banyaknya untai n -bit yang tidak mengandung pola 00.
- Carilah sebuah relasi ulang dan syarat awalnya.
 - Tunjukkan bahwa $S_n = f_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ dimana f adalah barisan Fibonacci.

Referensi

- 6.1. R. Johnsonbaugh, *Discrete Mathematics*, Fourth Edition, 1997, Prentice Hall.